

Matematica Finanziaria – Maggio 2008

Esercizio 1

Un portafoglio è formato da un'azione, due call ed una put dotate dei seguenti parametri:

$$A = 5; K = 4,5; u = 1,13; d = 1/u; i = 0,05; T = 2.$$

Calcolare:

- il valore del portafoglio in $t = 0$;
- il TIR atteso del portafoglio usando come probabilità le pseudo-probabilità risk neutral;
- i valori a scadenza del portafoglio complessivo.

Risoluzione.

Determiniamo i valori a scadenza ($T = 2$) del sottostante:

$$A_{uu} = A \cdot u^2 = 6,3845$$

$$A_{ud} = A \cdot u \cdot d = 5$$

$$A_{dd} = A \cdot d^2 = 3,9157$$

I pay off a scadenza della call e della put valgono rispettivamente:

$$C_{uu} = \max(A_{uu} - K; 0) = 1,8845$$

$$C_{ud} = \max(A_{ud} - K; 0) = 0,5000$$

$$C_{dd} = \max(A_{dd} - K; 0) = 0$$

$$P_{uu} = \max(K - A_{uu}; 0) = 0$$

$$P_{ud} = \max(K - A_{ud}; 0) = 0$$

$$P_{dd} = \max(K - A_{dd}; 0) = 0,5843$$

mentre la probabilità risk neutral vale:

$$\pi = \frac{1+i-d}{u-d} = 0,6735 \rightarrow 67,35\%$$

Possiamo ora calcolare il prezzo dell'opzione call e put:

$$C = \frac{\pi^2 \cdot C_{uu} + 2\pi \cdot (1-\pi) \cdot C_{ud} + (1-\pi)^2 \cdot C_{dd}}{(1+i)^2} = 0,9749$$

$$P = \frac{\pi^2 \cdot P_{uu} + 2\pi \cdot (1-\pi) \cdot P_{ud} + (1-\pi)^2 \cdot P_{dd}}{(1+i)^2} = 0,0565$$

Il valore del portafoglio all'epoca *zero* vale, tenendo conto delle quote di composizione date:

$$V_0 = 1 \cdot A + 2 \cdot C + 1 \cdot P = 7,0062$$

Il valore all'epoca *due* vale, nei tre casi possibili:

$$V_2(uu) = 1 \cdot A_{uu} + 2 \cdot C_{uu} + 1 \cdot P_{uu} = 10,1535$$

$$V_2(ud) = 1 \cdot A_{ud} + 2 \cdot C_{ud} + 1 \cdot P_{ud} = 6,0000$$

$$V_2(dd) = 1 \cdot A_{dd} + 2 \cdot C_{dd} + 1 \cdot P_{dd} = 4,5000$$

Infine, il valore atteso a scadenza utilizzando le probabilità risk neutral sarà:

$$V_2(att) = \pi^2 \cdot V_2(uu) + 2\pi \cdot (1 - \pi) \cdot V_2(ud) + (1 - \pi)^2 \cdot V_2(dd) = 7,7243$$

Il TIR atteso sarà perciò:

$$TIR = \sqrt{\frac{V_2(att)}{V_0}} - 1 = 0,05 \rightarrow 5\%$$

Esercizio 2

Una compagnia di assicurazione deve coprire un'uscita singola che avverrà fra tre anni e sarà di importo 1.000 mixando opportunamente i seguenti due titoli:

$$b_1 = (4; 104) / (1; 2)$$

$$b_2 = (5; 5; 5; 105) / (1; 2; 3; 4)$$

Sapendo che il tasso di mercato espresso su base **istantanea** è pari al 4,75% calcolare il saldo netto finale all'epoca 4 del portafoglio immunizzato sapendo che all'epoca 0,5 avviene uno shift additivo del +1%.

Risoluzione.

Si tratta di un problema di immunizzazione con una sola uscita, perciò utilizzeremo il teorema di Fisher-Weyl (vincolo di bilancio e di duration).

Il tasso istantaneo $\delta = 0,0475$ consente di determinare $i = e^\delta - 1 = 0,0486$ e $v = (1 + i)^{-1} = 0,9536$.

Lo scadenziario del portafoglio è:

$$P : (4\alpha + 5\beta; 104\alpha + 5\beta; 5\beta; 105\beta) / (1; 2; 3; 4)$$

Il vincolo di bilancio si scrive:

$$(4\alpha + 5\beta) \cdot v + (104\alpha + 5\beta) \cdot v^2 + 5\beta \cdot v^3 + 105\beta \cdot v^4 = 1.000 \cdot v^3 = 867,19$$

Il vincolo di duration si scrive:

$$\frac{(4\alpha + 5\beta) \cdot v + 2 \cdot (104\alpha + 5\beta) \cdot v^2 + 3 \cdot 5\beta \cdot v^3 + 4 \cdot 105\beta \cdot v^4}{867,19} = 3$$

Dalla risoluzione del sistema

$$\begin{cases} (4\alpha + 5\beta) \cdot v + (104\alpha + 5\beta) \cdot v^2 + 5\beta \cdot v^3 + 105\beta \cdot v^4 = 867,19 \\ (4\alpha + 5\beta) \cdot v + 2 \cdot (104\alpha + 5\beta) \cdot v^2 + 15\beta \cdot v^3 + 420\beta \cdot v^4 = 2.601,56 \end{cases}$$

si ottiene

$$\begin{cases} \alpha = 3,6200 \\ \beta = 5,0857 \end{cases}$$

Utilizzando queste quote, lo scadenziario del portafoglio delle entrate sarà:

$$P_{imm} : (39,91; 401,91; 25,43; 534) / (1; 2; 3; 4)$$

Di conseguenza i saldi netti avranno lo scadenziario:

$$S : (39,91; 401,91; -974,57; 534) / (1; 2; 3; 4)$$

Per effetto dello shift additivo, il nuovo tasso sarà $i = e^{0,0475+0,01} - 1 = 0,0592$.

Infine, il saldo netto all'epoca quattro sarà

$$S_4 = 39,91 \cdot 1,0592^3 + 401,91 \cdot 1,0592^2 - 974,57 \cdot 1,0592 + 534 = +0,0586$$

Esercizio 3

Dal Sole 24 Ore dell'8 maggio 2008 (quotazioni del 7) si evince che sul mercato è presente un BTP che scade l'1.08.2039 e che possiede le seguenti caratteristiche:

$$J(2) = 5\%; P = 99,00.$$

Calcolare il rendimento del titolo in oggetto.

Risoluzione.

Conoscendo il tasso nominale possiamo dedurre il tasso semestrale $i_{1/2} = 0,025$ e di conseguenza il valore delle cedole sarà $C = 100 \cdot i_{1/2} = 2,5$. Abbiamo un totale di sessantatré cedole, la prima della quale è riscossa il 1.08.2008.

Il flusso costituito dalle cedole può essere interpretato come una rendita semestrale anticipata di tre mesi e sette giorni. L'equazione di equilibrio finanziario sarà perciò:

$$99 = 2,5 \cdot a_{\overline{63}|j} \cdot (1+j)^{2\left(\frac{3}{12} + \frac{7}{365}\right)} + 100 \cdot (1+j)^{-2\left(31 + \frac{2}{12} + \frac{23}{365}\right)}$$

dove j è il tasso semestrale. Il tempo che intercorre tra la data di valutazione (7.05.2008) e la scadenza (1.08.2039) è pari a *trentuno anni, due mesi e ventitré giorni*.

Si ottiene per interpolazione $j \approx 2,58\%$, di conseguenza il TIR su base annua vale circa il 5,22%.

Esercizio 4

Un prestito di Euro 450.000 è restituito in 3 anni mediante un ammortamento tedesco che prevede quote capitali costanti semestrali ed è condotto al 7% effettivo annuo. Calcolare nuda proprietà ed usufrutto all'8% all'epoca 1,25.

Risoluzione.

Dalla conoscenza del tasso annuo $i = 0,07$ possiamo ricavare il tasso semestrale equivalente $i_{1/2} = \sqrt{1+i} - 1 = 0,0344$, il fattore di sconto $v_{1/2} = \frac{1}{1+i_{1/2}} = 0,9667$ ed il tasso di sconto $d_{1/2} = 1 - v_{1/2} = 0,0333$. Utilizzando questi dati possiamo determinare agevolmente il piano d'ammortamento completo:

N (semestri)	Quote capitale	Quote interessi	Rata	Debito residuo
0	0	14.968,58	14.968,58	450.000
1	75.000	12.473,82	87.473,82	375.000
2	75.000	9.979,05	84.979,05	300.000
3	75.000	7.484,29	82.484,29	225.000
4	75.000	4.989,53	79.989,53	150.000
5	75.000	2.494,76	77.494,76	75.000
6	75.000	0	75.000,00	0

Il calcolo di nuda proprietà ed usufrutto al tasso $j = 0,08$ sarà perciò:

$$N_{1,25} = \frac{75.000}{(1+j)^{0,25}} + \frac{75.000}{(1+j)^{0,75}} + \frac{75.000}{(1+j)^{1,25}} + \frac{75.000}{(1+j)^{1,75}} = 278.034,92$$

$$U_{1,25} = \frac{7.484,29}{(1+j)^{0,25}} + \frac{4.989,53}{(1+j)^{0,75}} + \frac{2.494,76}{(1+j)^{1,25}} = 14.317,29$$

Esercizio 5

Data la seguente forza d'interesse (intensità istantanea di interesse)

$$\delta(t) = i \cdot 0,99^t$$

- a) Calcolare il prezzo di una obbligazione che paga cedole annue di 4 e rimborsa il capitale alla pari dopo tre anni se $i = 0,05$.

b) Calcolare il TIR di detta obbligazione in caso di reinvestimento dei flussi intermedi al 6% in capitalizzazione composta.

Risoluzione.

Calcoliamo l'integrale della forza d'interesse:

$$\int_0^t \delta(s) ds = \int_0^t i \cdot 0,99^s ds = i \cdot \int_0^t 0,99^s ds = i \cdot \left[\frac{0,99^s}{\log 0,99} \right]_0^t = i \cdot \frac{0,99^t - 1}{\log 0,99}$$

$$\Rightarrow v(t) = e^{-i \cdot \frac{0,99^t - 1}{\log 0,99}} = e^{-0,05 \cdot \frac{0,99^t - 1}{\log 0,99}}$$

Il fattore di sconto alle varie epoche sarà:

$$\begin{cases} v(1) = 0,9515 \\ v(2) = 0,9057 \\ v(3) = 0,8626 \end{cases}$$

Lo scadenziario dell'obbligazione è:

$$(P; 4; 4; 104) / (0; 1; 2; 3)$$

perciò il prezzo è:

$$P = 4 \cdot v(1) + 4 \cdot v(2) + 104 \cdot v(3) = 97,14$$

Per effetto del reinvestimento dei flussi intermedi al 6% in capitalizzazione composta, avremo all'epoca *tre*:

$$M = 4 \cdot 1,06^2 + 4 \cdot 1,06 + 104 = 112,73$$

Infine, il TIR è dato da:

$$TIR = \sqrt[3]{\frac{M}{P}} - 1 = 0,0509$$

Esercizio 6

Un impianto del valore di 1.150.000 Euro può essere finanziato da un'azienda in due modalità alternative:

- il pagamento di 5 rate pari a 325.000 immediate anticipate in cui sono comprese spese di manutenzione;
- il pagamento di 5 rate di 250.000 immediate anticipate in cui non sono comprese dette spese di manutenzione.

Sapendo che le spese di manutenzione si presentano all'epoca 2 e 4 e che sono ciascuna pari a 200.000 valutare la convenienza tra le due alternative di finanziamento.

Individuare inoltre il valore delle spese di manutenzione che rende indifferente le due alternative.

Risoluzione.

La prima alternativa prevede un'entrata di 1.150.000 all'epoca *zero* ed il seguente flusso di uscite:

$$(-325.000; -325.000; -325.000; -325.000; -325.000) / (0; 1; 2; 3; 4)$$

Il saldo netto sarà perciò:

$$(+825.000; -325.000; -325.000; -325.000; -325.000) / (0; 1; 2; 3; 4)$$

Il TIR si ottiene risolvendo l'equazione di equilibrio:

$$825.000 = 325.000 \cdot a_{\overline{4}|i}$$

Si ottiene per interpolazione $TIR_1 \approx 21,04\%$.

La seconda alternativa prevede un'entrata di 1.150.000 all'epoca *zero* ed i seguenti flussi di uscite:

$$(-250.000; -250.000; -250.000; -250.000; -250.000) / (0; 1; 2; 3; 4)$$
$$(0; 0; -200.000; 0; -200.000) / (0; 1; 2; 3; 4)$$

Il saldo netto sarà perciò:

$$(+900.000; -250.000; -450.000; -250.000; -450.000) / (0; 1; 2; 3; 4)$$

Il TIR si ottiene risolvendo l'equazione di equilibrio:

$$900.000 = \frac{250.000}{1+i} + \frac{450.000}{(1+i)^2} + \frac{250.000}{(1+i)^3} + \frac{450.000}{(1+i)^4}$$

Si ottiene per interpolazione $TIR_2 \approx 19,03\%$.

La seconda alternativa è perciò più conveniente.

Supponiamo ora che le spese di manutenzione abbiano un valore incognito α . Lo scadenario della seconda alternativa sarà quindi:

$$(+900.000; -250.000; -250.000 - \alpha; -250.000; -250.000 - \alpha) / (0; 1; 2; 3; 4)$$

Imponiamo che il TIR dell'operazione sia $21,04\%$.

Avremo:

$$900.000 = \frac{250.000}{1,2104} + \frac{250.000 + \alpha}{1,2104^2} + \frac{250.000}{1,2104^3} + \frac{250.000 + \alpha}{1,2104^4}$$

Si ottiene un'equazione di primo grado in α che ha per soluzione $\alpha = 231.090$.